

## I. Reelle Zahlen

### Erweiterung des Zahlenbereichs

Bisher bekannte Zahlenmengen:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Jedes Element  $a$  aus  $\mathbb{Q}$  ist darstellbar durch

$$a = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}.$$

Zahlen, die nicht als Bruch darstellbar sind, heißen irrational. Rationale und irrationale Zahlen bilden zusammen die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

### Quadratwurzeln

Für  $a \geq 0$  ist  $\sqrt{a}$  diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat  $a$  ergibt.  
Die Zahl unter der Wurzel heißt Radikand.

$$\sqrt{25} = 5, \text{ denn } 5^2 = 25.$$

### Rechnen mit Quadratwurzeln

Für  $a, b \geq 0$  gilt:  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Für  $a \geq 0, b > 0$  gilt:  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Die üblichen Rechengesetze gelten unverändert.

Rationalmachen des Nenners:  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}$

Teilweise radizieren:  $\sqrt{b^7} = \sqrt{b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b} = b \cdot b \cdot b \cdot \sqrt{b} = b^3 \sqrt{b}$

Beispiel:  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

**Beachte:**  $\sqrt{9} - \sqrt{4} \neq \sqrt{9-4} \quad !!!$

### Wurzelgleichungen

Lösungsverfahren: Isoliere den Wurzelterm auf einer Seite der Gleichung, quadriere beide Seiten der Gleichung und löse dann die wurzelfreie Gleichung.

Beispiel:

$$\sqrt{2x-3} = 5 \quad |^2 \quad D = [1,5; \infty[$$

$$2x - 3 = 25$$

$$x = 14 \quad \rightarrow \text{Probe: L.S. } \sqrt{2 \cdot 14 - 3} = 5 \quad \text{R.S. } \sqrt{25} = 5 \quad \text{Richtig!}$$

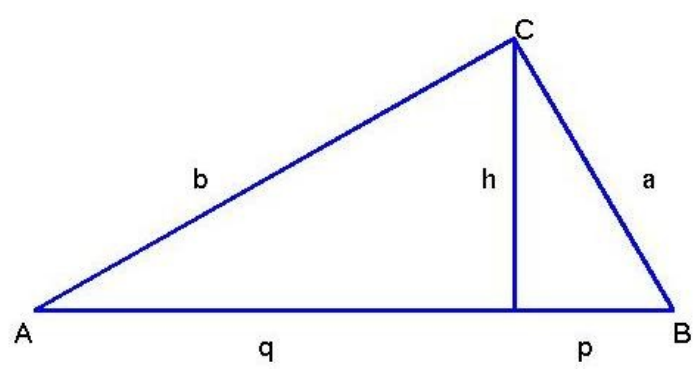
Also folgt dann:

$$L = \{14\}$$

<b>Allgemeine Wurzeln</b>	<p>Für <math>a \geq 0</math> ist <math>\sqrt[n]{a}</math> diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. Die Zahl a unter der Wurzel heißt Radikand, n ist der Wurzelexponent. (<math>n \in \mathbb{N}; n \geq 2</math>)</p> <p>Beispiele: <math>\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3</math> ; <math>\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2}</math></p> <p>Beachte: <math>2\sqrt[4]{2} = 2 \cdot \sqrt[4]{2}</math> aber <math>2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}</math> !</p>
---------------------------	--

<b>Potenzen mit rationalen Exponenten</b>	<p><math>a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}</math> Beispiel: <math>8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2</math></p> <p><math>a^{-p} = \frac{1}{a^p}</math> Beispiel: <math>8^{-3} = \frac{1}{8^3}</math></p> <p><math>a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}</math> Beispiel: <math>8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = 8\sqrt[3]{8^2}</math></p>
---	---

## II. Die Satzgruppe des Pythagoras



<b>Kathetensatz</b>	<p>Die Fläche des Quadrates über einer Kathete ist gleich der Fläche des anliegenden Hypotenusenrechtecks.</p> $a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$
---------------------	---

<b>Höhensatz</b>	<p>Die Fläche des Quadrates über der Höhe ist gleich der Fläche des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten.</p> $h^2 = p \cdot q$
------------------	--

<b>Satz des Pythagoras</b>	<p>Die Summe der Fläche der beiden Kathetenquadrate ist gleich der Fläche des Hypotenusenquadrats.</p> $a^2 + b^2 = c^2$
----------------------------	--

### III. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

#### Quadratische Funktionen

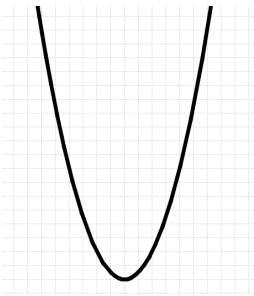
Der Graph der allgemeinen **quadratischen Funktion** der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit } (a \neq 0)$$

ist eine Parabel. Der Graph von  $g(x) = x^2$  heißt Normalparabel.

Die Parabel zur Funktion

- $f$  ist nach oben geöffnet, falls  $a > 0$
- bzw. nach unten geöffnet, falls  $a < 0$ .



Die Parabel zur Funktion  $f$  ist

- breiter als die Normalparabel, falls  $|a| < 1$ ,
- enger als die Normalparabel, falls  $|a| > 1$ ,

den tiefsten bzw. höchsten Punkt einer Parabel nennt man Scheitelpunkt.

#### Sonderfälle:

Ausgehend von der Normalparabel ist der Graph von  $f(x) = (x+d)^2 + e$

um  $e$  in  $y$ -Richtung verschoben und um  $-d$  in  $x$ -Richtung verschoben und besitzt den Scheitelpunkt  $S(-d|e)$ .

#### Scheitelpunktform von quadratischen Funktionen

Jede quadratische Funktion der Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mit  $(a \neq 0)$  lässt sich durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelpunktform

$$f(x) = a(x+d)^2 + e \quad \text{bringen.}$$

Daraus ist abzulesen, dass  $S(-d|e)$  der Scheitel der Parabel ist. Für  $x = -d$  nimmt die Funktion ihren

- kleinsten Funktionswert (**Minimum**) an, falls  $a > 0$  ist,
- größten Funktionswert (**Maximum**) an, falls  $a < 0$  ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,5x^2 - 2,5x + 2,375 \\ &= 0,5(x^2 - 5x + 4,75) \\ &= 0,5(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2,5 + 2,5^2 - 2,5^2 + 4,75) \\ &= 0,5[(x - 2,5)^2 - 6,25^2 + 4,75] \\ &= 0,5(x - 2,5)^2 - 0,75 \end{aligned}$$

**Lösungsformel für quadratische Gleichungen**

Die Lösung(en) einer quadratischen Gleichung  $ax^2+bx+c=0$  mit  $a \neq 0$  ergeben sich mit Hilfe der Mitternachtsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Term unter der Wurzel heißt Diskriminante  $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ . Die Diskriminante bestimmt die Anzahl der Lösungen:

- für  $D < 0$  : keine Lösung
- für  $D = 0$  : eine Lösung
- für  $D > 0$  : zwei Lösungen
- 

**IV. Quadratische Funktionen in Anwendungen**

**Gleichungssysteme**

Ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen nennt man ein 3,3-Gleichungssystem.

Lösungsschema: (1) Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt das Ergebnis (2) in die beiden anderen Gleichungen ein. Nun löst man eine der restlichen Gleichung nach einer Variablen (3) auf und setzt das Ergebnis (4) in die letzte Gleichung ein. Durch „Rückeinsetzen“ (5) erhält man eine Lösung für alle 3 Variablen.

Ein 3,3-Gleichungssystem entsteht z.B. beim Bestimmen des Funktionsterms  $f(x) = ax^2 + bx + c$  einer Parabel durch 3 Punkte.

Beispiel: A(1/1), B(-1/5) und C(2/2) liegen auf einer Parabel. Daraus folgt:

I  $a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c = 1$  (1)  $\Rightarrow c = 1 - a - b$

II  $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 5$  (2)  $\Rightarrow -2b + 1 = 5$

(3)  $\Rightarrow b = -2$

III  $a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c = 2$  (2)  $\Rightarrow 3a + b + 1 = 2$

(4)  $\Rightarrow 3a - 1 = 2$

.... aus (4) folgt nun weiter:

$a = 1$  durch Rückeinsetzen (5) in  $b = -2$  und  $c = 1 - a - b$  folgt  $f(x) = 1 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 2$

**Extremwertprobleme**

Führt die Suche nach dem Maximum oder Minimum einer Größe auf eine quadratische Funktion, so liefert der Scheitelpunkt der Parabel dieses Extremum.

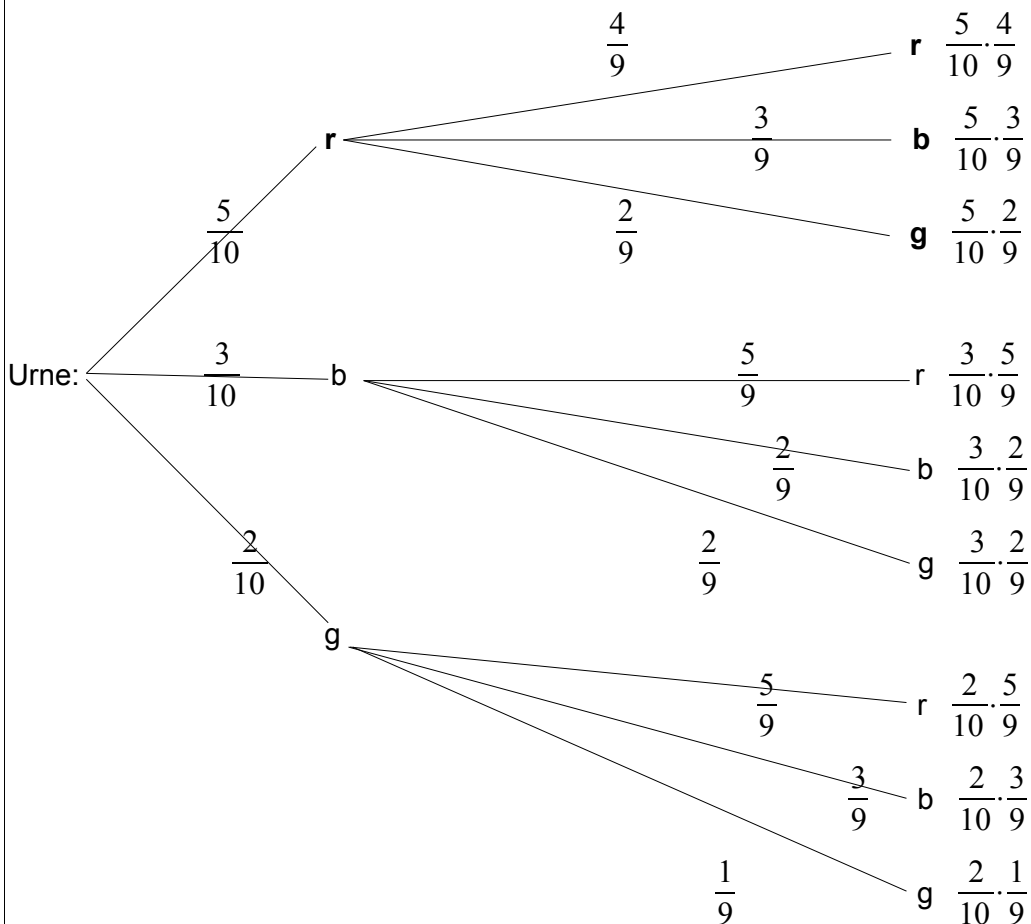
## V. Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente, bei denen mehrere Teilerperimente nacheinander ausgeführt werden, bezeichnet man als zusammengesetzte Zufallsexperimente oder auch als **mehrstufige Zufallsexperimente**.

Beispiel: mehrmaliges Ziehen aus einer Urne, Werfen zweier Würfel,...

Die einzelnen Ergebnisse kann man in einem **Baumdiagramm** darstellen: **2-maliges Ziehen ohne Zurücklegen** aus einer Urne mit 5 roten, 3 blauen und 2 grünen Kugeln:

**Baumdiagramm:**



### 1. Pfadregel

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** ist gleich dem **Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem Pfad, der zu dem Ergebnis führt**.

Beispiel: Die 1. Kugel ist rot und die 2. Kugel ist blau.

$$P(\{rb\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

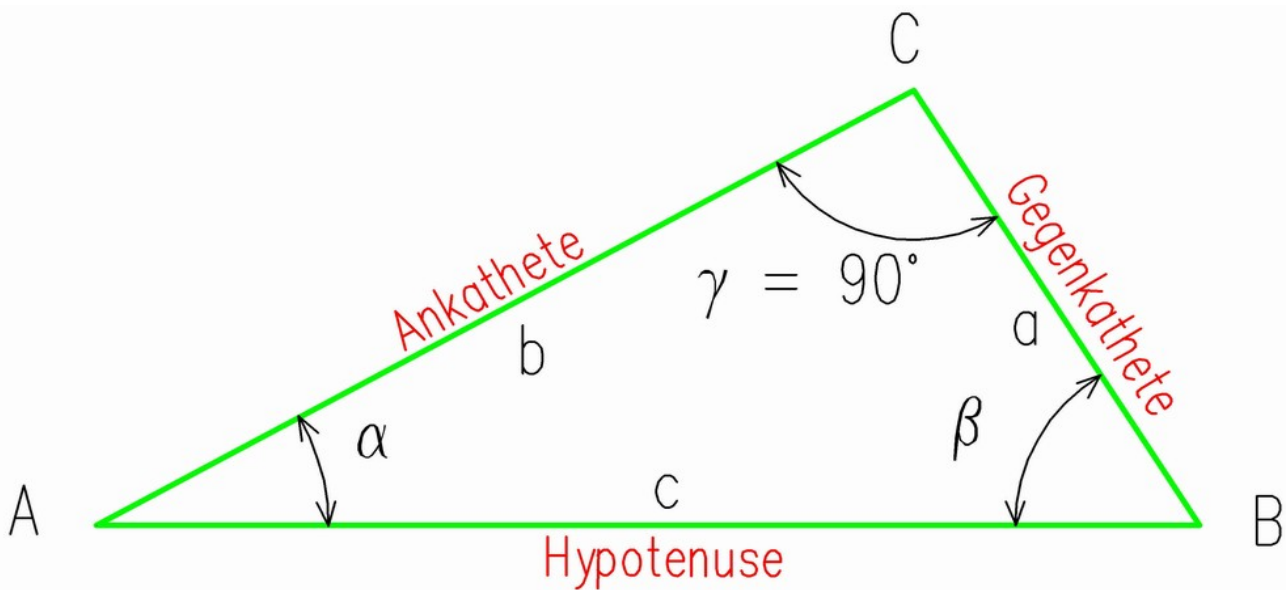
2. Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich der Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu diesem Ereignis führen.

Beispiel: Eine Kugel ist rot und eine Kugel ist grün

$$P(\{rg; gr\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

VI. Trigonometrie



(Bezeichnungen im Bezug auf den Winkel  $\alpha$  )

In einem rechtwinkligen Dreieck liegt die Hypotenuse gegenüber dem rechten Winkel, die einem spitzen Winkel gegenüberliegende Kathete **Gegenkathete** zu diesem Winkel, analog heißt die dem Winkel anliegende Kathete **Ankathete**. Jedem spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck wird ein Seitenverhältnis zugeordnet.

Sinus, Kosinus und Tangens:

Zusammenhänge:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

(1)  $\tan(\alpha) = \sin \frac{(\alpha)}{\cos}(\alpha)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

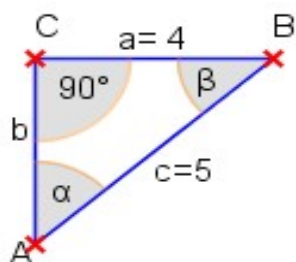
(2)  $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

(3a)  $\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$

(3b)  $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$

**Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck**



Ist ein rechtwinkliges Dreieck durch die Angabe von Seitenlängen und/oder Winkeln eindeutig bestimmt (vgl. Kongruenzsätze!), lassen sich alle anderen Seiten und Winkel berechnen!

Beispiel (SWS):

$$\cos^{-1}(\beta) = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta \approx 36,87^\circ$$

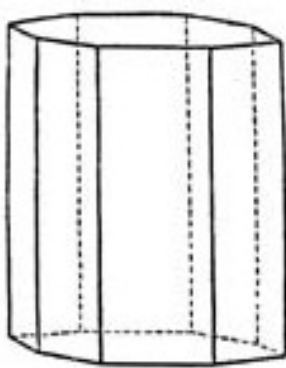
$$\sin(\beta) = \frac{b}{5} \Rightarrow b \approx 3,00$$

$$\tan^{-1}(\alpha) = \frac{4}{b} \Rightarrow \alpha \approx 53,13^\circ$$

(viele abweichende Lösungswege sind möglich!)

**VII. Raumgeometrie**

**Prisma:**



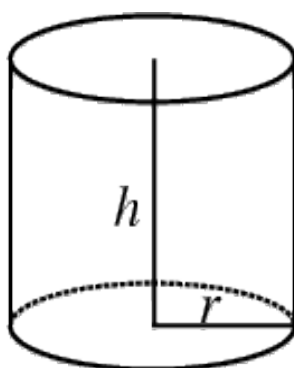
Ein gerades Prisma ist ein geometrischer Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten n-Ecken als Grund- und Deckfläche sowie von n zu Grund- und Deckfläche senkrechten Rechtecken als Seitenflächen begrenzt wird.

$$V_{Prisma} = G \cdot h$$

$$O_{Prisma} = 2G + M$$

M ist die Mantelfläche und besteht aus der entsprechenden Anzahl von Rechtecken.

**Zylinder:**



Ein gerader Zylinder ist ein geometrischer Körper, der von zwei in parallelen Ebenen liegenden kongruenten Kreisen als Grund- und Deckfläche begrenzt wird.

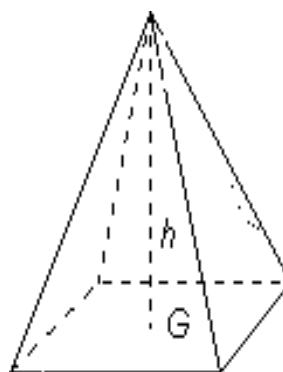
$$V_{Zylinder} = g \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$O_{Zylinder} = 2G + M$$

$$= 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$$

Der Mantel ist abgewickelt ein Rechteck mit der Länge  $2\pi r$  (=Umfang des Kreises) und der Breite h (Körperhöhe).

**Pyramide:**

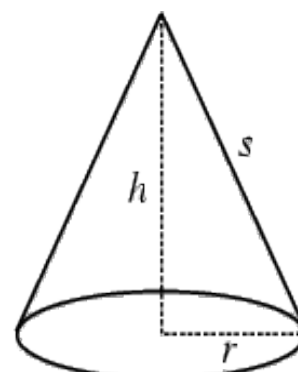


Eine Pyramide ist ein geometrischer Körper, mit einem n-Eck als Grundfläche, dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die alle einen Punkt gemeinsam haben, die Spitze der Pyramide. Die Dreiecke bilden die Mantelfläche. Der Abstand der Spitze von der Grundfläche heißt Höhe.

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyramide}$$

$$O_{Pyramide} = G + M$$

**Kegel:**



Ein gerader Kreiskegel ist ein geometrischer Körper, der durch die Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete entsteht.

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$O_{Kegel} = G + M$$

$$= \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot m$$

mit  $m = \sqrt{r^2 + h^2}$

[m ist die Mantellinie s]