

# I. Zahlen

---

# II. Funktionen

## Direkt proportionale Zuordnungen

x und y sind **direkt proportional** zueinander, wenn...

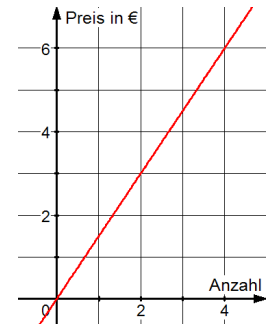
- zum n-fachen Wert von x der n-fache Wert von y gehört
- die Wertepaare quotientengleich sind, d.h. es gilt:  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$  bzw.  $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
- $y = k \cdot x$ , wobei k der Proportionalitätsfaktor ist
- das Diagramm eine Ursprungsgerade ist

2 Gurken kosten 3 €,  
5 Gurken kosten 7,50 €.

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{7,50} \text{ bzw.}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{7,50}{5}$$

$$y = 1,5 \cdot x$$



## Indirekt proportionale Zuordnungen

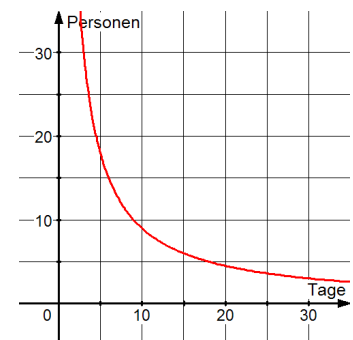
x und y sind **indirekt proportional** / umgekehrt proportional, wenn...

- zum n-fachen Wert von x der  $\frac{1}{n}$ -fache Wert von y gehört
- die Wertepaare produktgleich sind, d.h. es gilt:  $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$
- $y = \frac{k}{x}$
- das Diagramm eine Hyperbel ist

Die Verpflegung reicht für 6 Personen 15 Tage.  
Die Verpflegung reicht für 10 Personen 9 Tage.

$$6 \cdot 15 = 10 \cdot 9$$

$$y = \frac{90}{x}$$



## Funktion

Eine **Funktion** f ist eine **eindeutige Zuordnung**:  
Sie ordnet jedem zulässigen x-Wert **genau einen** y-Wert zu.

Schreibweisen:

$$f : x \mapsto y \text{ oder } f(x) = y$$

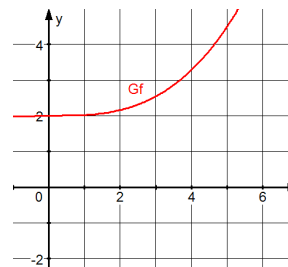
Der von x abhängige Wert f(x) bzw. y heißt **Funktionswert**.

Wegen der Eindeutigkeit liegen beim Graphen G<sub>f</sub> der Funktion Punkte nie übereinander.

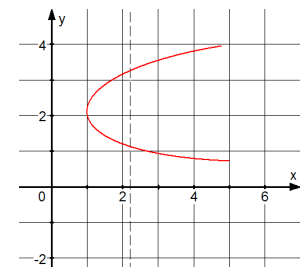
Die **Definitionsmenge** ist die Menge aller zulässigen Werte von x.

Die **Wertemenge** ist die Menge aller Funktionswerte.

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x + 2 \text{ oder } f : f(x) = y = \frac{1}{2} \cdot x + 2$$



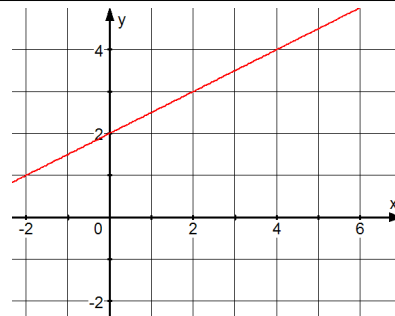
Funktion



keine Funktion

Eine Funktion kann beschrieben werden durch:

- einen Graphen / ein Schaubild
- einen Funktionsterm
- eine Wertetabelle

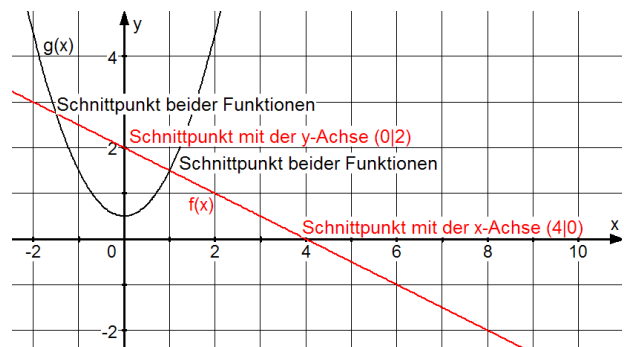


$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2$$

x	-2	0	1	2
f(x) = y	0	2	2,5	3

**Schnittpunkte** der Funktion f(x)

- mit der x-Achse (**Nullstelle**):  $y = 0$   
(d.h. alle Punkte liegen auf der x-Achse)
- mit der y-Achse:  $x = 0$   
(d.h. dieser Punkt liegt auf der y-Achse)
- mit einer weiteren Funktion g(x):  $f(x) = g(x)$   
(d.h. alle Punkte die sowohl auf  $G_g$  als auch auf  $G_f$  liegen)



**Lineare Funktion**

Die Gleichung der linearen Funktion hat die allgemeine Form

$$y = mx + t$$

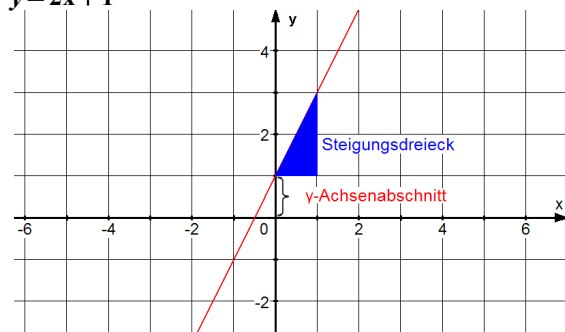
wobei der Koeffizient m, die **Steigung** angibt, die Konstante t hingegen den **y-Achsenabschnitt**.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Die Steigung wird am Graphen abgelesen, indem man ein **Steigungsdreieck** einzeichnet.

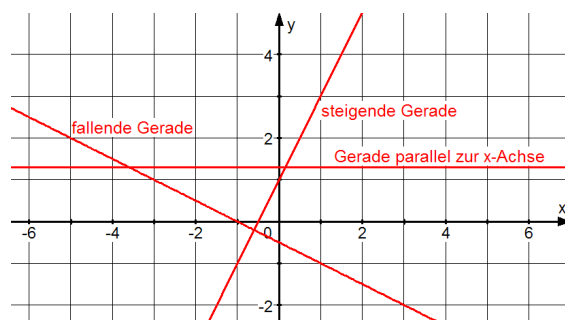
Das Steigungsdreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck mit waagerechter Kathete der Längeneinheit 1 und senkrechter Kathete.

$$y = 2x + 1$$



Man unterscheidet:

- steigende Gerade mit  $m > 0$   
(hier:  $y = 2x + 1$ )
- fallende Gerade mit  $m < 0$   
(hier:  $y = -0,5x - 0,5$ )
- Gerade parallel zur x-Achse mit  $m = 0$   
(hier:  $y = 1,3$ )



### Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Gleichungen der Form  $2x - y = 3$  heißen **lineare Gleichungen mit zwei Variablen**.

Es gilt:

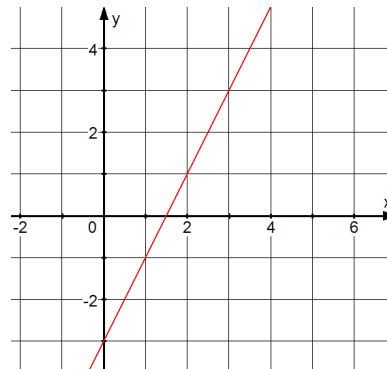
- (1) Jede Lösung besteht aus einem Zahlenpaar  $(x|y)$ .
- (2) Die Lösungsmenge enthält unendlich viele Lösungen.
- (3) Die graphische Darstellung der Lösungsmenge ist eine Gerade.

**Darstellung der Gleichung:**

- Implizite Form:  
 $ax + by + c = 0$  (a und b nicht gleichzeitig 0)
- Explizite Form:  
 $y = mx + t$

Sonderfälle:

- (1)  $b \neq 0$ , aber  $a = 0$   
 $\Rightarrow by = -c$  bzw.  $y = -\frac{c}{b}$   
 Lösungsmenge ist eine Parallele zur x-Achse.
- (2)  $b = 0$ , aber  $a \neq 0 \Rightarrow ax = -c$  bzw.  
 $x = -\frac{c}{a}$   
 Lösungsmenge ist eine Parallele zur y-Achse.  
*(keine Funktion!)*



$$L = \{(x|y) \mid y = 2x - 3\}$$

„Menge alle Punkte  $(x|y)$ , für die gilt:  $y = 2x - 3$ “

### Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Ein lineares **Gleichungssystem (LGS)** von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten x und y lässt sich stets auf die Form

$$\begin{aligned} \text{I. } ax + by &= e; \\ \text{II. } cx + dy &= f; \end{aligned} \quad \text{bringen.}$$

Lösungsmethoden:

- (1) Einsetzungsverfahren
- (2) Additionsverfahren

Eine lineares Gleichungssystem kann

- genau eine Lösung
- keine Lösung
- unendlich viele Lösungen besitzen.

**(3) Zeichnerische Lösung**

Zeichnet man die zu den beiden Gleichungen gehörenden Geraden, so veranschaulichen die gemeinsamen Punkte die Lösung des LGS.

- I.  $x + 3y = 7$
- II.  $4x - y = 2$

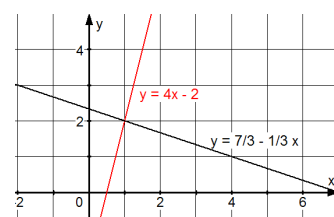
**(1) Einsetzungsverfahren**

$$\begin{aligned} \text{II}' \cdot y &= 4x - 2 && \text{in I:} \\ \text{I}' \cdot x + 3(4x - 2) &= 7 \\ x + 12x - 6 &= 7 \\ 13x &= 13 \\ x &= 1 && \text{in II':} \\ y &= 2 && L = \{(1|2)\} \end{aligned}$$

**(2) Additionsverfahren**

$$\begin{aligned} 4 \cdot \text{I} - \text{II} : 12y + y &= 28 - 2 \\ 13y &= 26 \\ y &= 2 && \text{in II:} \\ 4x - 2 &= 2 \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 && L = \{(1|2)\} \end{aligned}$$

**(3) Zeichnung**



### Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen wie  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(z) = \frac{3}{z^2} + 2$  oder

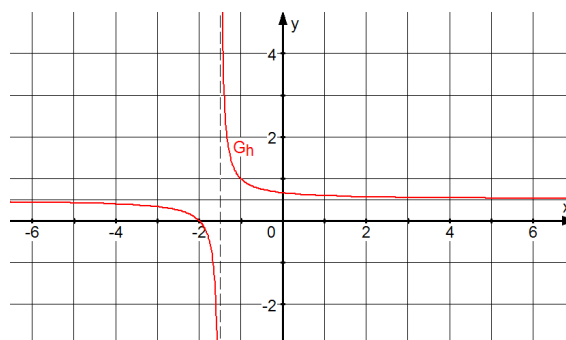
$h(x) = \frac{1+0,5x}{x+1,5}$ , deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, nennt man **gebrochen rationale Funktionen**.

Alle Zahlen, für die der **Nenner null** wird, können **nicht zur Definitionsmenge** der Funktion gehören.

Eine Gerade, die sich dem Graphen einer Funktion  $f$  beliebig genau annähert, nennt man eine **Asymptote** des Funktionsgraphen  $G_f$ .

Man unterscheidet **senkrechte und waagrechte Asymptoten**.

$$h(x) = \frac{1+0,5x}{x+1,5} ; D_h = \mathbb{Q} \setminus \{-1,5\}$$



senkrechte Asymptote:  $x = -1,5$   
 waagrechte Asymptote:  $y = 0,5$

### Rechnen mit Bruchtermen

#### Kürzen:

Merke: **Nie** aus **Differenzen** und **Summen** kürzen!

Beim Kürzen werden Zähler und Nenner eines Bruchterms jeweils durch denselben Term dividiert.

#### Erweitern:

Beim Erweitern werden Zähler und Nenner eines Bruchterms jeweils mit demselben Term multipliziert.

$$\frac{2x^2 - 3x}{4x^3 - 12x^2 + 9x} = \frac{x(2x-3)}{x(4x^2 - 12x + 9)}$$

$$= \frac{x(2x-3)}{x(2x-3)^2} \cdot \frac{1}{x(2x-3)} ;$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{(1-x) \cdot 2(1+x)}{(1+x) \cdot 2(1+x)} = \frac{2(1-x^2)}{2(1+x)^2}$$

$$= \frac{2-2x^2}{2+2x+2x^2} ;$$

#### Addieren bzw. Subtrahieren:

Gleichnamige Brüche:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Ungleichnamige Brüche werden durch Erweitern auf den Hauptnenner (HN) gleichnamig gemacht. Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Nenner.

$$\frac{a}{2a+2b} + \frac{b}{3a-3b} - \frac{ab}{a^2-b^2}$$

#### Gemeinsamer Nenner:

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

$$3a - 3b = 3(a - b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$\text{HN: } 2 \cdot 3 \cdot (a + b)(a - b)$$

$$= \frac{a \cdot 3(a-b) + b \cdot 2(a+b) - 6ab}{6(a+b)(a-b)} = \frac{3a^2 - 7ab + 2b^2}{6(a+b)(a-b)}$$

#### Multiplizieren bzw. Dividieren:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{ax^2}{bx-by} : \frac{ax}{bx^2-by^2} = \frac{ax^2}{b(x-y)} \cdot \frac{b(x+y)(x-y)}{ax}$$

$$= \frac{ax^2 b(x+y)(x-y)}{b(x-y)ax} = x(x+y)$$

### Negative Exponenten

Die Definition der Potenzen wird durch

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \text{ sinnvoll erweitert.}$$

Es gilt  $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$  und  $x^m : x^n = x^{m-n}$  für  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

$$\frac{x^3 \cdot x^{-4}}{x^{-2}} = x^{3-4} \cdot x^2 = x^{-1} \cdot x^2 = x^{-1+2} = x^1 = x$$

### Bruchgleichungen

Eine Gleichung, bei der eine Variable mindestens einmal im Nenner auftritt, heißt **Bruchgleichung**. Die Definitionsmenge D ist die Grundmenge ohne die Menge aller Nullstellen aller Nenner.

Durch die Multiplikation mit dem Hauptnenner macht man die Bruchgleichung nennerfrei.

$$\frac{2x+2}{x^2-1} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2}$$

$$\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} ; D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0; 1\}$$

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{3}{x^2} \quad | \cdot x^2(x-1) \text{ (HN)}$$

$$2x^2 - 2x(x-1) = 3(x-1)$$

$$x=3 \quad 3 \in D \Rightarrow L = \{3\}$$

## III. Stochastik

### Laplace-Experimente

Bei der Durchführung eines Zufallsexperiments tritt genau ein **Ergebnis** von mehreren möglichen Ergebnissen ein.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge**. Sie wird mit  $\Omega$  bezeichnet. Die einzelnen Ergebnisse bezeichnet man mit  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ .

Jede Teilmenge A der Ergebnismenge  $\Omega$  eines Zufallsexperiments nennt man **Ereignis**.

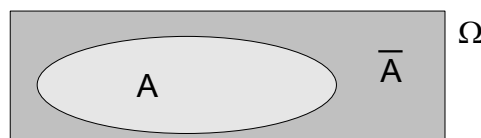
Man sagt: **Das Ereignis A ist eingetreten**, wenn bei einer Durchführung des Zufallsexperiments ein Ergebnis aus A auftritt.

Bei einem Zufallsexperiment wird jedem Ereignis A eine **Wahrscheinlichkeit P(A)** zwischen 0 und 1 zugeordnet.

Die Wahrscheinlichkeit P(A) wird durch das Experiment oder durch die sich stabilisierende relative Häufigkeit eines Ereignisses nahe gelegt.

### Werfen eines 6-seitigen Würfels

Wenn die Augenzahl von Interesse ist:  
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$



Ereignis A: „Augenzahl größer als 4“, also  $A = \{5; 6\}$ ,  $\{5; 6\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Gegenereignis  $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{1; 2; 3; 4\}$

sicheres Ereignis:  $A = \Omega$

unmögliches Ereignis:  $A = \{ \}$  oder  $A = \emptyset$

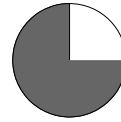
$$P(\text{„gerade Zahl“}) = 0,5$$

$$P(A) = P(\{5; 6\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zufallsexperimente, bei denen **alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich** sind, heißen **Laplace-Experimente**.  
 Man sagt: „Die Laplace-Annahme ist erfüllt.“

Beispiele für Laplace-Experimente:  
 Werfen eines Würfels, der nicht gezinkt ist.  
 Werfen einer nicht manipulierten Münze.

Beispiele für Nicht-Laplace-Experimente:  
 Werfen von zwei Würfeln und betrachten der Augensumme des Wurfes.  
 Drehen des folgenden Glücksrads:



Hat ein Laplace-Experiment  $n$  Ergebnisse, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis  $\frac{1}{n}$ .

Das Werfen eines 6-seitigen Würfels, der nicht gezinkt ist, hat sechs gleich wahrscheinliche Ergebnisse:  $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$

Für Laplace-Experimente gilt:

Beispiel:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Würfeln:  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
 $A = \text{„Augenzahl gerade“} = \{2; 4; 6\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = 0,5$$

**Zählprinzip:**

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl der möglichen Ergebnisse, indem man die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen Stufen miteinander multipliziert, *alternativ*:  
 Zieht man aus  $k$  verschiedenen Mengen mit  $m_1, m_2, m_3 \dots m_k$  Elementen jeweils ein Element, so gibt es insgesamt  $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_k$  Möglichkeiten.

Von A nach B führen 8 Wege, von B nach C führen 5 Wege und von C nach D verlaufen 6 Wege.

Es gibt also  $8 \cdot 5 \cdot 6 = 240$  Möglichkeiten, um von A nach D zu kommen.

Möchte man  $n$  Objekte **anordnen**, d.h.  $n$  Objekte nacheinander aus einer Urne ziehen, so gibt es dafür  $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$   
 (sprich:  **$n$  Fakultät**).

6 Personen sollen sich auf 6 Stühlen anordnen. Man hat insgesamt  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$  mögliche Sitzordnungen.

## IV. Geometrie

### Der Kreis (Umfang und Fläche)

Die **Kreiszahl**  $\pi \approx 3,14\dots$

Eine 2€-Münze hat den Radius  $r = 1,3\text{cm}$ .

Für den **Kreisumfang** gilt:

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Ihr Umfang ist

$$U = 2 \cdot \pi \cdot 1,3\text{cm} \\ = 2,6\text{cm} \cdot \pi \\ \approx 8,17\text{cm}$$

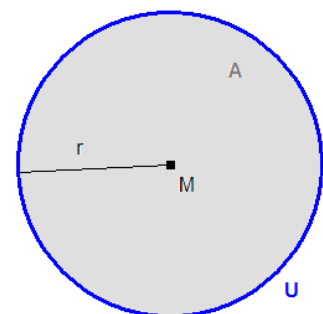
Umfang und Radius sind direkt proportional.

Die **Kreisfläche** wird wie folgt berechnet:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Ihre Fläche ist

$$A = \pi \cdot (1,3\text{cm})^2 \\ = 1,69 \text{ cm}^2 \cdot \pi \\ \approx 5,31\text{cm}^2$$



Der Flächeninhalt  $A$  ist eine quadratische Funktion des Radius, d.h. verdoppelt sich der Radius, so vervierfacht sich der Flächeninhalt.

### Strahlensatz und Ähnlichkeit

Bei einer **zentrischen Streckung** mit dem Streckzentrum  $Z$  und dem Streckfaktor  $k$  (dabei sei  $k > 0$ ) gilt für den Bildpunkt  $A'$  zu einem Punkt  $A$  ( $A \neq Z$ ):

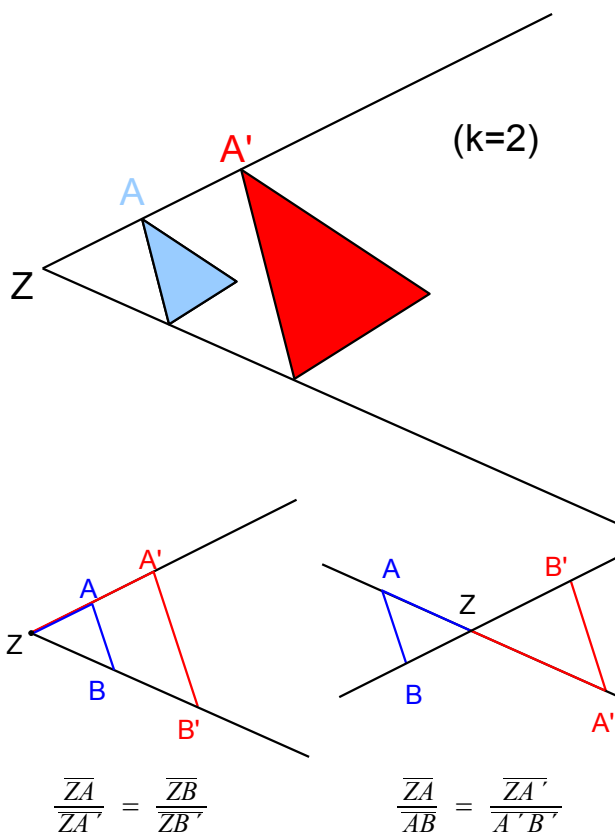
- (1)  $A' \in \overline{ZA}$
- (2)  $\overline{ZA'} = k \cdot \overline{ZA}$

Ist der Streckfaktor  $k > 1$ , so wird vergrößert, ist  $0 < k < 1$ , so wird verkleinert.

#### Strahlensätze

Werden zwei Geraden, die sich in einem Punkt  $Z$  schneiden, von zwei Parallelen außerhalb von  $Z$  geschnitten, so verhalten sich

- (1) je zwei Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden,
- (2) die Abschnitte auf den Parallelen wie die **von  $Z$  aus** gemessenen entsprechenden Abschnitte auf der einen Geraden (bzw. auf der anderen Geraden)



$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

1. Strahlensatz

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{A'B'}}$$

2. Strahlensatz

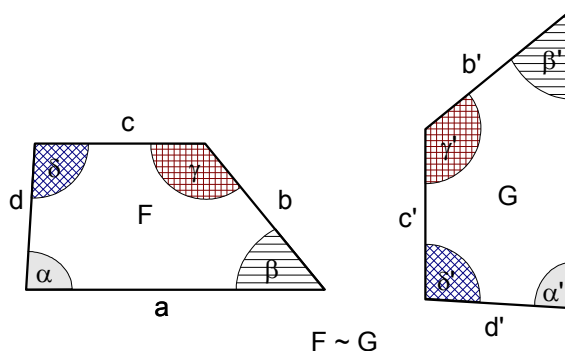
Figuren  $F$  und  $G$  nennt man zueinander **ähnlich** (in Zeichen:  $F \sim G$ ), wenn man  $F$  durch eine zentrische Streckung so vergrößern oder verkleinern kann, dass ihr Bild  $F'$  zu  $G$  kongruent ist.

Für **ähnliche Figuren** gilt:

- entsprechende Seiten haben das gleiche Längenverhältnis,
- entsprechende Winkel sind gleich groß.
- Sind die Seitenlängen von  $G$   $k$ -mal so groß wie die von  $F$ , so ist der Flächeninhalt von  $G$   $k^2$ -mal so groß wie der von  $F$ .

**Dreiecke** sind bereits dann **ähnlich**,

- wenn sie in zwei (und damit in allen) Winkeln übereinstimmen (WW-Satz),
- oder wenn sie im Verhältnis ihrer Seiten übereinstimmen (S:S:S-Satz).



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots$$

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \dots$$

