

I. Zahlen

Zahlensysteme

Unser Zahlensystem besteht aus den Ziffern 0 bis 9 (Dezimalsystem) und ist ein **Stellenwertsystem**; die Stelle einer Ziffer bestimmt ihren Wert in der Zahl.

$$2035 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Stufenzahlen: 1, 10, 100, 1 000, 10 000, ...

Das **römische Zahlensystem** ist ein **Additionssystem**.

I = 1 **V** = 5 **X** = 10 **L** = 50
C = 100 **D** = 500 **M** = 1000

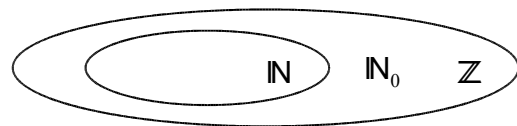
Nebeneinander stehende Zeichen werden zusammengezählt, außer es steht ein Zeichen mit kleinerem Wert vor einem Zeichen mit größerem Wert. In diesem Fall wird der kleinere Wert vom größeren abgezogen.

VI = 6
 IX = 9
 XIV = 14
 MCMXCIV = 1994
 MMMDCCCLXXXVIII = 3888

Zahlenmengen

Menge der natürlichen **Zahlen**:

$$\mathbb{N} = \{ 1; 2; 3; \dots \}$$



Menge der **natürlichen Zahlen mit Null**:

$$\mathbb{N}_0 = \{ 0; 1; 2; 3; \dots \}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$$

Menge der **ganzen Zahlen**:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots \}$$

$$7 \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -5 \in \mathbb{Z} \text{ aber } -5 \notin \mathbb{N}$$

Natürliche Zahlen größer 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind, heißen **Primzahlen**.

z.B. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

Jede natürliche Zahl lässt sich eindeutig in ein Produkt von Primfaktoren zerlegen (**Primfaktorzerlegung**).

$$2035 = 5 \cdot 407 = 5 \cdot 11 \cdot 37$$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist **durch 2 teilbar**, wenn ihre letzte Ziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.

780 ist durch 2, 3 und 5 teilbar

Eine Zahl ist **durch 5 teilbar**, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

78 ist durch 2 und 3 teilbar.

Eine Zahl ist **durch 3 teilbar**, wenn ihre Quersumme (das ist die Summe all ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist.

51 ist durch 3 teilbar.

105 ist durch 3 und 5 teilbar

1971 ist durch 3 teilbar.

Runden

Beim Runden ist die rechte Nachbarziffer der Stelle, auf die gerundet werden soll, wichtig:
 Ist sie 0, 1, 2, 3 oder 4, wird **abgerundet**,
 ist sie 5, 6, 7, 8 oder 9, wird **aufgerundet**.

$$5748 \approx 5750 (Z)$$

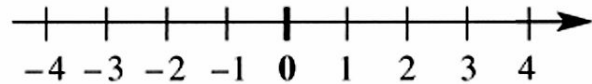
$$5748 \approx 5700 (H)$$

$$5748 \approx 6000 (T)$$

Alle Ziffern rechts von der Stelle, auf die gerundet werden soll, werden durch Nullen ersetzt.

Größenvergleich von Zahlen

Die **Zahlengerade** ist eine gerade Linie ohne Anfang und Ende. Die Entfernung zweier Punkte, die zu benachbarten ganzen Zahlen gehören, ist stets gleich und heißt **Längeneinheit** (LE).



Von zwei ganzen Zahlen ist diejenige die größere, die auf der Zahlengeraden weiter in Pfeilrichtung liegt.

$$2 > -3 \quad \text{oder} \quad -2 < 4$$

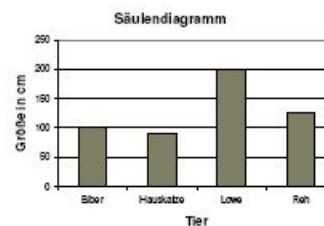
Zahlen, die auf der Zahlengeraden gleich weit vom Nullpunkt entfernt sind, heißen **Gegenzahlen**.

3 und -3 sind Gegenzahlen

Der Abstand einer ganzen Zahl z vom Nullpunkt heißt **Betrag** von z (kurz: |z|).

$$|-2| = 2 \quad \text{oder} \quad |3| = 3$$

Mit einem **Figurendiagramm**, **Balkendiagramm**, **Säulendiagramm** oder **Kurvendiagramm** können Informationen übersichtlich dargestellt werden.



Gliederung von Termen

Addition: In der **Summe** wird der 2. *Summand* zum 1. *Summanden* addiert.

$$\begin{array}{c} \text{Summe} \\ \hline \underline{24} + \underline{6} = 30 \\ \text{1. Summand} \quad \text{2. Summand} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Differenz} \\ \hline \underline{30} - \underline{6} = 24 \\ \text{Minuend} \quad \text{Subtrahend} \end{array}$$

Subtraktion: In der **Differenz** wird der *Subtrahend* vom *Minuenden* subtrahiert.

Multiplikation: Im **Produkt** wird der 1. *Faktor* mit dem 2. *Faktor* multipliziert.

$$\begin{array}{c} \text{Produkt} \\ \hline \underline{12} \cdot \underline{4} = 48 \\ \text{1. Faktor} \quad \text{2. Faktor} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Quotient} \\ \hline \underline{48} : \underline{4} = 12 \\ \text{Dividend} \quad \text{Divisor} \end{array}$$

Division: Im **Quotienten** wird der *Dividend* durch den *Divisor* dividiert.

Durch Null darf nicht dividiert werden.

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$; Die Basis ist 5, der Exponent 3.
 $7 + (6 \cdot 2)$ ist eine Summe, $(7 + 6) \cdot 2$ ist ein Produkt

Die **Potenz** besteht aus der **Basis** und dem **Exponenten**.

Der letzte Rechenschritt bestimmt die **Art des Terms**.

Rechnen mit ganzen Zahlen

Addition und Subtraktion ganzer Zahlen:

1. Ersetze zwei aufeinanderfolgende Rechenzeichen durch eines.
2. Addiere für die Fälle (+)/+ und -/- die Beträge der Zahlen und gib dem Ergebnis das entsprechende Vorzeichen.
3. Für die Fälle (+)/- und -/+ wird die betragskleinere Zahl von der betragsgrößeren abgezogen und dem Ergebnis das Vorzeichen der betragsgrößeren Zahl gegeben.

$3 + (+2) = 3 + 2 = 5$	$-3 + (+2) = -3 + 2 = -1$
$3 + (-2) = 3 - 2 = 1$	$-3 + (-2) = -3 - 2 = -5$
$3 - (+2) = 3 - 2 = 1$	$-3 - (+2) = -3 - 2 = -5$
$3 - (-2) = 3 + 2 = 5$	$-3 - (-2) = -3 + 2 = -1$
$3 \cdot 2 = 6$	$6 : 3 = 2$
$3 \cdot (-2) = -6$	$6 : (-3) = -2$
$-3 \cdot 2 = -6$	$-6 : 3 = -2$
$-3 \cdot (-2) = 6$	$-6 : (-3) = 2$

Man **multipliziert** oder **dividiert** zwei ganze Zahlen zuerst ohne Beachtung des Vorzeichens und setzt dann im Ergebnis das Vorzeichen. Gleiche Zeichen ergeben „+“, ungleiche „-“.

Rechengesetze

Kommutativgesetz (für a, b aus \mathbb{Z}):

$$a + b = b + a \text{ und } a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz (für a, b, c aus \mathbb{Z}):

$$(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Das **Distributivgesetz** kann man zum Ausmultiplizieren oder Ausklammern nutzen:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ für } a, b, c \text{ aus } \mathbb{Z}$$

Werden keine Rechenvorteile genutzt, so gilt:

Klammern zuerst

Potenzen vor Punktrechnungen

Punkt vor Strich

Rechne von links nach rechts.

Nicht benutzte Bestandteile werden unverändert übernommen.

$$13 + 728 = 728 + 13$$

$$23 \cdot 56 = 56 \cdot 23$$

$$(37 + 195) + 5 = 37 + 195 + 5 = 37 + (195 + 5)$$

$$(3 \cdot 8) \cdot 125 = 3 \cdot 8 \cdot 125 = 3 \cdot (8 \cdot 125)$$

$$98 \cdot 4 = (100 - 2) \cdot 4 = 100 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 400 - 8 = 392$$

$$(390 + 39) : 13 = 390 : 13 + 39 : 13 = 30 + 3 = 33$$

$$(90 - 3^4) \cdot (3 \cdot 4 - 3) = (90 - 81) \cdot (12 - 3) = 9 \cdot 9 = 81$$

$$(44 : 4 - 4) \cdot 4 + 4 = (11 - 4) \cdot 4 + 4 =$$

$$= 7 \cdot 4 + 4 = 28 + 4 = 32$$

Größen

Eine Größe besteht aus einer **Maßzahl** und einer **Einheit**.

Längeneinheiten: km; hm; dam; m; dm; cm; mm
Umrechnungszahl: 10

Masseinheiten: t; kg; g
Umrechnungszahl: 1000

Zeiteinheiten: 1d=24h
1h=60min
1min=60s

Beispiel: 1h= 3600s; 1km=100 000cm; 1kg=0,001t

II. Funktionen

III. Stochastik

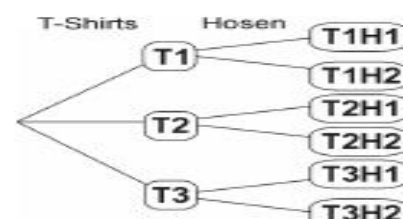
Baumdiagramm

Das **Zählprinzip** kann man am **Baumdiagramm** veranschaulichen:

Jeder Pfad durch den Baum steht für eine Kombinationsmöglichkeit.

Hat die erste Verzweigung m Äste und die zweite n Äste, so gibt es $m \cdot n$ Kombinationsmöglichkeiten.

Für 3 T-Shirts und 2 Hosen gibt es $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten:
T₁H₁, T₁H₂, T₂H₁,
T₂H₂, T₃H₁ und T₃H₂.



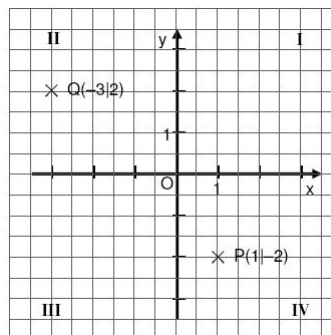
IV. Geometrie

Koordinatensystem

Ein **Koordinatensystem** besteht aus zwei zueinander senkrechten Zahlengeraden mit gemeinsamem Nullpunkt. Sie heißen x-Achse bzw. y-Achse.

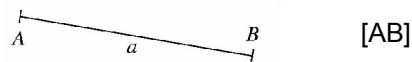
Ein Punkt $P(x|y)$ ist durch seine x-Koordinate und seine y-Koordinate eindeutig festgelegt.

Die Ebene wird in vier **Quadranten** unterteilt (I, II, III und IV). Punkte auf den Achsen werden keinem Quadranten zugeordnet

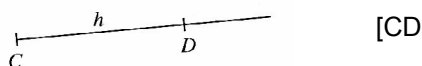


Geometrische Grundbegriffe

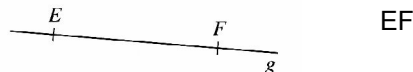
Eine **Strecke** ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte.



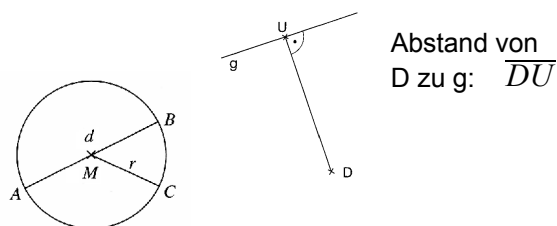
Eine Strecke, die man über einen Endpunkt hinaus unbegrenzt verlängert, heißt **Halbgerade**.



Eine Strecke, die man über beide Endpunkte hinaus unbegrenzt verlängert, heißt **Gerade**.

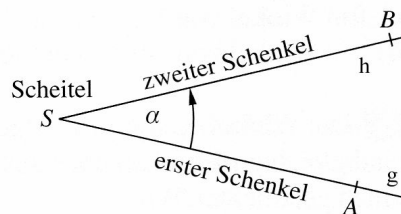


Die kürzeste Entfernung eines Punktes D von einer Geraden g heißt **Abstand** von D zu g.



Alle Punkte, die von einem Punkt M gleich weit entfernt sind, liegen auf einem **Kreis** mit dem Mittelpunkt M.

Dreht man eine Halbgerade [SA um den Anfangspunkt S **entgegen dem Uhrzeigersinn**, so bilden Anfangs- und Endlage der Halbgeraden miteinander einen **Winkel**.



Die Größe eines Winkels wird in **Grad** gemessen. 1 Grad ist der 360ste Teil einer Voldrehung.

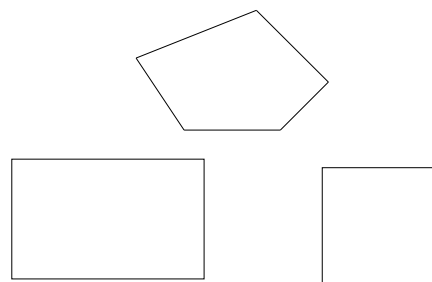
spitzer Winkel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	rechter Winkel $\alpha = 90^\circ$	stumpfer Winkel $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	gestreckter W. $\alpha = 180^\circ$	überstumpfer W. $180^\circ < \alpha < 360^\circ$
---	---------------------------------------	--	--	---

Figuren

Geradlinig begrenzte Flächenstücke nennt man **Vielecke**.

Vierecke, bei denen die Seiten an jeder Ecke senkrecht aufeinander stehen, heißen **Rechtecke**.

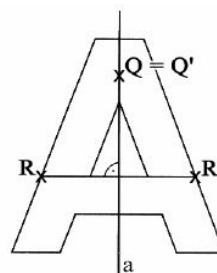
Ein Rechteck mit vier gleich langen Seiten heißt **Quadrat**.



Achsensymmetrische Figuren

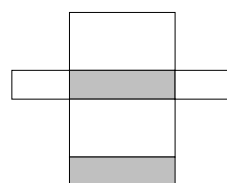
Lässt sich eine Figur so falten, dass die beiden Hälften genau aufeinander passen, so heißt sie **achsensymmetrisch**. Die Fallgerade heißt **Symmetrieachse**.

Die Verbindungsstrecke zweier **symmetrischer Punkte** wird durch die Symmetrieachse senkrecht halbiert.



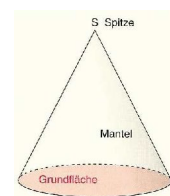
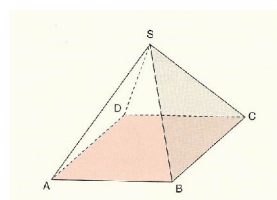
Körper

Die meisten **geometrischen Körper** bestehen aus **Ecken, Kanten** und verschiedenen **Begrenzungsflächen**. Die Begrenzungsflächen bilden zusammen die **Oberfläche** des Körpers. Breitet man diese eben aus, so erhält man das so genannte **Netz**.

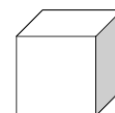
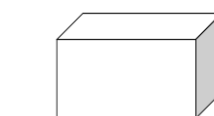


Quadernetz

Eine **Pyramide** hat ein **Vieleck als Grundfläche** und eine **Spitze**.

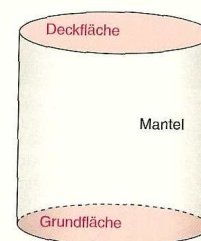
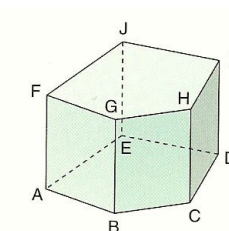


Ein **Kegel** hat eine Kreisfläche als Grundfläche und eine Spitze. Er besitzt eine einzige **gekrümmte Seitenfläche**, den **Kegelmantel**.



Ein **Quader** wird von sechs Rechtecken begrenzt. Je zwei **gegenüberliegende Rechtecke sind gleich groß**. In den Ecken stehen die Kanten jeweils aufeinander senkrecht.

Ein **Würfel** ist ein Quader mit lauter gleich großen **quadratischen Seitenflächen**.



Ein **Prisma** besitzt als Grund- und Deckfläche gleich große Vielecke. Die Seitenflächen sind Rechtecke.

Ein **Zylinder** besitzt als Grund- und Deckfläche zwei gleich große Kreisflächen. Der **Zylindermantel** bildet eine einzige gekrümmte Seitenfläche.

Eine **Kugel** besteht aus einer einzigen gekrümmten Fläche. Jeder Punkt auf der Kugeloberfläche ist vom Kugelmittelpunkt gleich weit entfernt.

Flächeninhalte

Die Umrechnungszahl zwischen zwei benachbarten Flächeneinheiten ist 100:

- 1 cm² = 100 mm²
- 1 dm² = 100 cm²
- 1 m² = 100 dm²
- 1 a = 100 m²
- 1 ha = 100 a
- 1 km² = 100 ha

